Série d'exercices (Espace)

Exercice 1 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$. On considère les droites D et D' définies par : D : $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ et D' : $\begin{cases} x=1+\beta \\ y=1+2\beta \\ z=1-\beta \end{cases}$ $(\beta\in\mathbb{R})$.

1) Montrer que D et D' ne sont ni orthogonales ni coplanaires.

2) a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant D et parallèle à D'.

b) Donner un vecteur directeur de la droite Δ perpendiculaire à D et à D'.

3) a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$' contenant D' et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de Δ .

4) Soit $A(1,0,-1)$. Calculer la distance du point A à D.

5) Soit $\mathcal{P}_m$: $(2m-1)x+(2-m)y-(m+1)z+m+1=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

a) Vérifier que $\forall m\in\mathbb{R}$, P_m est un plan.

b) Montrer que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent une droite fixe que l'on précisera.

6) Soit $M\in D$ et $M'\in D'$.

a) Quelle relation doivent vérifier α et β pour que la droite (MM') soient parallèles au plan $\mathcal{P}_1$.

b) Dans ce cas déterminer l'ensemble des points $I = M * M'$.

Exercice 2 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{P}_m$:$(2-m)x+3my-(m+1)z-3=0$ où $m\in\mathbb{R}$

1) Déterminer le plan $\mathcal{P}_m$ parallèle à la droite D : $x-2=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{4}$.

2) Soit $A(1,0,1)$, $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{k}$. Existe-t-il un plan $\mathcal{P}_m$ parallèle au plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$.

3)Montrer que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent une droite fixe Δ qu'on précisera.

4) Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on considère la droite Δ_λ : $\begin{cases} x=2+\lambda\alpha \\ y=(1-\lambda)\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un plan Q indépendant de λ contenant toutes les droites Δ_λ .

5) Déterminer une équation cartésienne du plan P_λ contenant Δ_λ et parallèle à D_1 : $\begin{cases} x=2 \\ x+z=1 \end{cases}$.

6) Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{E}$. Discuter suivant la position de M_0, le nombre de plan $\mathcal{P}_m$ passant par M_0.

Exercice 3 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$. $\mathcal{P}_m$:$(2m+1)x-2y+(m+1)z-3m+4=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent une droite fixe Δ qu'on précisera.

2) Δ_1 : $\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=3+\alpha \\ z=1+4\alpha \end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ et Δ_2 : $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$.

a) Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point I de $\mathcal{P}_0$.

b) Ecrire une équation cartésienne du plan Q contenant Δ_1 et Δ_2.

3) Peut-on trouver m pour que : (a) $Q\perp\mathcal{P}_m$ (b) $A(\frac{1}{2},0,2)\in\mathcal{P}_m$.

4) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ perpendiculaire à Δ_1 et passant par A.

5) Calculer $d(I,\mathscr{R})$.

Exercice 4 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace $\mathscr{E}$. On considère les ensembles suivants :

$E=\{M(1+\alpha,2+2\alpha,\alpha)\,;\alpha\in\mathbb{R}\}$.

$\mathscr{P}_m : mx+(m+1)y+(m-1)z+2m-1=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

$Q_m : m^2x+my-m^2=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer suivant m, la nature des ensembles E, $\mathscr{P}_m$ et Q_m.
2) Existe-t-il un plan $\mathscr{P}_m$ parallèle à la droite $D : \dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{2z}{3}$.
3) Montrer que tous les plans $\mathscr{P}_m$ contiennent une droite fixe Δ qu'on précisera.
4) Déterminer suivant m, $\mathscr{P}_m\cap Q_m$.
5) Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{E}$. Discuter suivant la position de M_0, le nombre de plan $\mathscr{P}_m$ passant par M_0.

Exercice 5 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace $\mathscr{E}$. On considère les points $A(1,2,2)$, $B(0,2,0)$, $C(-1,4,-2)$ et $E(1,3,3)$.

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation cartésienne.

2) On considère les plans : $P_1 : x-2y+2z-1=0$ et $P_2 : x-3y+2z+2=0$.

a) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants . (On notera Δ leur droite d'intersection).

b) Montrer que $E\in\Delta$.

c) Montrer que $\mathscr{P}\perp P_1$ et $\mathscr{P}\perp P_2$. En déduire une représentation paramétrique de Δ .

3) Déterminer $d(A,\Delta)$ (2 méthodes).

Exercice 6 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace $\mathscr{E}$. On considère les points $A(1,1,1)$ et $B(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$.

1) Montrer que le plan $\mathscr{P} : x+y-z=0$ est le plan médiateur du segment [AB] (2 méthodes).

2) Montrer que le plan Q : $x-y+2=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

3) Soit $S : x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$.

a) Montrer que S est une sphère que l'on caractérisera.

b) Montrer que S et $\mathscr{P}$ sont sécants et caractériser $\mathscr{C}=S\cap\mathscr{P}$.

c) Montrer que si S' est une sphère contenant $\mathscr{C}$ alors son centre appartient à (AB).

d) Montrer que $\forall M\in(AB)$, $d(M,Q)=\sqrt{2}$.

Exercice 7 :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace $\mathscr{E}$. On considère les points $A(0,-1,1)$ et $B(\frac{5}{2},0,\frac{9}{2})$.

1) Caractériser chacune des sphères : $S_1 : x^2+y^2+z^2+2y-2z-34=0$ et $S_2 : x^2+y^2+z^2-5x-9z-30=0$.

2) On considère les plans : $P_1 : x+y+z-1=0$ et $P_2 : x-2y+3z=0$.

a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1 et D_2 définies per : D_1 la perpendiculaire à P_1 passant par A, et D_2 la perpendiculaire à P_2 passant par B.

b) Caractériser $\mathscr{C}_1=S_1\cap P_1$ et $\mathscr{C}_2=S_2\cap P_2$.

3) Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes en un point I qu'on donnera les coordonnées.

4) Montrer qu'il existe une seule sphère S' contenant $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Préciser son centre et son rayon.

Exercice 8 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'ensemble S_m d'équation :
$x^2+y^2+z^2-2x+2my+m^2-2m=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer suivant m, la nature de S_m .
2) Lorsque S_m est une sphère, déterminer l'ensemble du centre I_m .
3) Soit $\mathscr{P} : x+2y+2z+8=0$.

a) Montrer que la droite Δ contenant les points I_m est parallèle à $\mathscr{P}$.

b) Discuter suivant m la position relative de $\mathscr{P}$ et S_m .

4) Montrer que $\mathscr{P}$ coupe S_4 suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le rayon et le centre.

5) Donner une équation du plan $\mathscr{P}_1$ parallèle à $\mathscr{P}$ et tangent à S_2.

6) Vérifier que $\mathscr{P}_1$ est tangent à S_{-4} et déterminer les coordonnées des points de contact de $\mathscr{P}_1$ avec S_2 et S_{-4}.

7) Soit $I_\alpha(1,-\alpha,\alpha)$ et Q_α le plan passant par I_α et perpendiculaire à Δ.

a) Montrer que $d(I_m, Q_\alpha) = \sqrt{2}\,|m-\alpha|$.

b) Déterminer $S_m \cap Q_{-1}$ pour tout $m \neq -1$.

c) Déterminer suivant m dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, l'ensemble $S_m \cap Q_2$.

Exercice 9 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'ensemble S_m d'équation : $x^2+y^2+z^2-2mx-2y-2(m+1)z+2=0$ où $m\in\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P} : 2x+2y+z-3=0$.

1) On désigne par Q le plan passant par $A(-1,0,-1)$ et $B(-1,1,0)$ et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

a) Montrer qu'une équation de Q est : $x-2y+2z+3=0$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = \mathscr{P}\cap Q$.

2) Déterminer les valeurs de m pour les quelles S_m est une sphère.

3) Déterminer suivant m, la nature de $S_m \cap \mathscr{P}$.

4) Montrer que $S_1 \cap \mathscr{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre H et le rayon .

5) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

6) Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passante par H et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

7) Montrer qu'ils existent deux sphères tangentes à Q et contenant $\mathscr{C}$. Préciser leurs centres et leurs rayons.

Exercice 10 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les plans $\mathscr{P}$: $2x+y-2z+3=0$ et Q : $x+y-z+3=0$.

1) Montrer que $\mathscr{P}$ et Q ne sont ni parallèles ni perpendiculaires. Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = \mathscr{P}\cap Q$.

2) Trouver une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ passant par $A(2,1,0)$ et perpendiculaire à Δ. Calculer $d(A,\Delta)$.

3) Pour $m\in\mathbb{R}$, on pose l'ensemble S_m : $x^2+y^2+z^2-2mx-2my-6mz+10m^2-3=0$.

a) Montrer que pour tout m S_m est une sphère dont on déterminera le centre I_m et le rayon r_m .

b) Déterminer m pour que S_m soit tangente à $\mathscr{P}$ et préciser les coordonnées du point de contact

c) Etudier suivant les valeurs de m, la position de S_m et Q.

d) Montrer que $S_1 \cap Q$ est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'ensemble S_m d'équation : $x^2+y^2+z^2-2mx+2(1-m)y-2z+2m^2-2m-2=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout m S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon.

2) Déterminer l'ensemble des points I_m .

3) Soit $\mathscr{P}$: $x+y+2z-1=0$.

a) Etudier suivant m, la position relative de S_m et $\mathscr{P}$.

b) Montrer que $\mathscr{P}$ coupe S_1 suivant un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.

4) On donne $m=0$ et $A(0,-1,3)$.

a) Vérifier que $A\in S_0$.

b) Déterminer une équation du plan Q tangent à S_0 en A.

c) Montrer que Q est tangent à toutes les sphères S_m .

Exercice 12 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'ensemble S_m d'équation :
$x^2+y^2+z^2-4mx+2(1+m)y-2z+4m^2+2m=0$ où $m\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout m S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon.
2) Déterminer l'ensemble des points I_m .
3) Soit $\mathscr{P}$: $2x+y-2z=0$.
   a) Etudier suivant m, la nature de $S_m\cap\mathscr{P}$.
   b) Montrer que $\mathscr{P}$ coupe S_2 est un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.
4) Soit B un point fixé de S_2 et K le milieu de $[BI_2]$.
   a) Montrer que pour tout point M, $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MI_2}=MK^2-\frac{3}{2}$.
   b) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MI_2}=\frac{5}{2}$.

Exercice 13 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1,2,0)$; $B(0,1,-1)$ et $C(2,0,-2)$. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1) Soit S l'ensemble des point M tels que : $MA^2+MB^2=3$. Montrer que S est la sphère de diamètre $[AB]$.
2) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC. Vérifier que A est le projeté orthogonal de G sur $\mathscr{D}$.
4) Soit S_1 l'ensemble des points M tels que : $MA^2+MB^2+MC^2=9$.
   a) Montrer que pour tout point M on a : $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+6$.
   b) En déduire que S_1 est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
   c) Déterminer la position de relative de S_1 et $\mathscr{D}$.
5) Montrer que $S\cap S_1$ est un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.
6) Déterminer les plans parallèles au plan de $\mathscr{C}$ et tangents à S_1.

Exercice 14 :

Dans l'espace on considère trois points non alignés O, A et B et on désigne par G le point défini par : $\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

1) Vérifier que $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.
2) Soit C un point n'appartenant pas au plan (OAB) et S l'ensemble des points M tels que : $\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MC}=0$.
   a) Montrer que $M\in S$ si et seulement si $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MC}=0$.
   b) En déduire la nature de S.
3) Dans la suite l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On suppose que $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$ et $C(0,0,4)$.
   a) Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
   b) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant $\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
   c) Donner une équation cartésienne de S.
   d) Montrer que le plan $\mathscr{P}$: $z=0$ coupe S suivant le cercle de diamètre $[CG]$